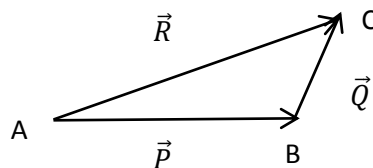
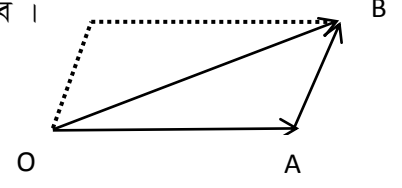
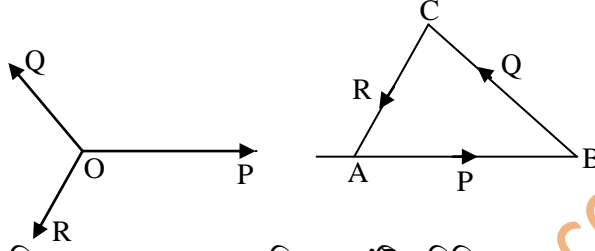
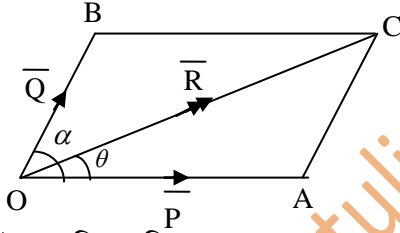
উচ্চতর গণিত (সূত্রাবলী)
একাদশ শ্রেণি
অধ্যায়-২ঃ ভেক্টর

- ভেক্টর একটি ল্যাটিন শব্দ যার অর্থ পরিবাহক ।
- ভেক্টর শব্দের উৎপত্তি ল্যাটিন শব্দ vehere থেকে যার অর্থ to carry।
- ভেক্টরের অত্যাধুনিক রুপ হল টেনসর ।
- বিন্দু ,রেখা ও বহুভুজের ভেক্টও গাণিতিক সমীকরণ ব্যবহার করে ভেক্টর গ্রাফিক্স পদ্ধতিতে কম্পিউটারে ছবি প্রদর্শন করা হয় ।
- ভেক্টর গ্রফিক্স পদ্ধতিতে ছবি বড় করলে তা বিটম্যাপ পদ্ধতির মত ফেটে যায় না বরং আরও স্পষ্ট হয় এবং ফাইলের সাইজ অপিরর্তিত থাকে ।
- ভেক্টর রাশিঃ যে রাশির মান ও দিক রয়েছে, তাকে সদিক রাশি বা ভেক্টর রাশি বলা হয়।
- ভেক্টর রাশিকে মোটা অক্ষরে বা অক্ষরের উপরে / নিচে টান অথবা তীর চিহ্নের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। যেমন- একটি ভেক্টর রাশি a কে $\boldsymbol{a}$ বা $\overline{a}$ বা $\underline{a}$ বা $\vec{a}$ আকারে প্রকাশ করা যায়।
- ভেক্টরের মানঃ কোন ভেক্টরের আদিবিন্দু ও প্রান্তবিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বকে তার মান বলা হয়।
- $\boldsymbol{a}$ ভেক্টরের মানকে $|\boldsymbol{a}|$ বা $|\overline{a}|$ বা a দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- ধারক রেখা:ভেক্টর যে অসীম রেখার উপর অবস্থিত তাকে ভেক্টরের ধারক রেখা বলে ।
- ভেক্টরের সমতা:দুটি ভেক্টরকে পরস্পর সমান বলা হবে যদি
  -যদি তাদের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল হয় ।
  --ভেক্টর দুটির দিক একই দিকে হয় ।
  ---ভেক্টর দুটির দৈর্ঘ্য সমান হয় ।
- বিপরীত ভেক্টর : যদি দুটি ভেক্টরের দৈর্ঘ্য সমান এবং দিক বিপরীত হয় তাহলে তাদেরকে বিপরীত ভেক্টর বলে ।
- শূন্য ভেক্টর : যে ভেক্টরের মান শূন্য তাকে শূন্য ভেক্টর বলে ।
  - শূন্য ভেক্টরের আদি ও প্রান্ত বিন্দু একই ।
- সদৃশ ভেক্টর : দুটি ভেক্টরের দিক একই হলে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলে ।
  - দুটি সদৃশ ভেক্টরের মান একই হতে পারে বা ভিন্ন হতে পারে ।
- একক ভেক্টরঃ যে ভেক্টরের মান এক, তাকে একক ভেক্টর বলে।
  - কোন ভেক্টরকে তার মান দ্বারা ভাগ করলে যে ভেক্টর পাওয়া যায়, তাকে ঐ ভেক্টরের দিকে বা তার সমান্তরাল দিকে একক ভেক্টর বলে।
  - $\boldsymbol{a}$ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টরকে $\hat{a}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $\hat{a} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$। এখানে (^) চিহ্নকে হ্যাট (Hat) চিহ্ন বলা হয়।
- প্রকৃত ও অপ্রকৃত ভেক্টর : শূন্য ভেক্টর ব্যতীত সকল ভেক্টরকে প্রকৃত ভেক্টর এবং শূন্য ভেক্টরকে অপ্রকৃত ভেক্টর বলে ।
- ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র :যদি একটি ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু একইক্রমে দুটি ভেক্টরকে নির্দেশ করে ,তবে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু বিপরীতক্রমে ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি নির্দেশ করবে ।

অর্থাৎ, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

বা, $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$

- একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টরের মান ও দিক যদি কোন ত্রিভূজের দুটি বাহু দ্বারা সূচিত করা যায়, তবে ভেক্টর দুটির লব্ধির মান ও দিক ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু দ্বারা সূচিত হবে ।

অর্থাৎ $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$

- এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি ভেক্টরের মান ও দিক যদি একইক্রমে কোন ত্রিভূজের তিনটি বাহু দ্বারা সূচিত করা যায়, তবে তারা সাম্যাবস্থায় থাকবে। $\overline{P}+\overline{Q}+\overline{R}=0$ অর্থাৎ, $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}= 0$

❖ ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্র : কোন সামান্তরিকের দু'টি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুটি ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত করা যায়, তবে ঐ সামান্তরিকের উক্ত বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি মানে ও দিকে সূচিত হবে।

অর্থাৎ , $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

বা, $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$

❖ অবস্থান ভেক্টরঃ যদি মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে একটি বিন্দু P এর অবস্থানকে $\overline{OP}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়, তবে $\overline{OP}$ কে P এর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়।

❖ দু'টি ভেক্টরের ডট গুণনঃ মনেকরি, $\overline{a}$ ও $\overline{b}$ দু'টি ভেক্টর এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ । সুতরাং $\overline{a}\,.\,\overline{b}=ab\cos\theta$ কে ভেক্টরদ্বয়ের ডট গুণন বলে।

❖ দু'টি ভেক্টরের ক্রস গুণনঃ মনেকরি, $\overline{a}$ ও $\overline{b}$ দু'টি ভেক্টর এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ । সুতরাং $\overline{a}\times\overline{b}=ab\sin\theta\,\hat{n}$ কে ভেক্টরদ্বয়ের ক্রস গুণন বলে; যেখানে $\hat{n}$ হচ্ছে $\overline{a}\times\overline{b}$ এর দিকে একটি একক ভেক্টর।

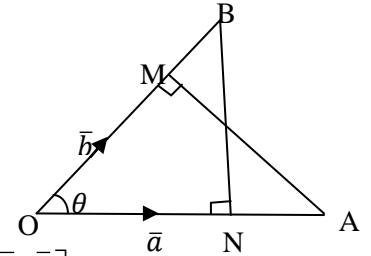
❖ লম্ব অভিক্ষেপ (বা, অভিক্ষেপ)ঃ(একটি ভেক্টরের উপর অপর একটি ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয়)

মনেকরি, $\overline{OA}=\overline{a},\ \overline{OB}=\overline{b}$ এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ ।

এখন, $BN \perp OA$ এবং $AM \perp OB$ অংকন করি।

তাহলে, ΔOAM হতে পাই, $OM = OA\cos\theta = a\cos\theta$

$\therefore$ $\overline{b}$ এর উপর $\overline{a}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= OM = a\cos\theta = \dfrac{\overline{a}\,.\,\overline{b}}{|\overline{b}|}$ $\left[\because\ \cos\theta = \dfrac{\overline{a}\,.\,\overline{b}}{ab}\right]$

আবার, ΔOBN হতে পাই, $ON = OB\cos\theta = b\cos\theta$

$\therefore$ $\bar{a}$ এর উপর $\bar{b}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= ON = b\cos\theta = \dfrac{\bar{a}\,.\,\bar{b}}{|\bar{a}|}$

❖ উপাংশ (বা, অংশক)ঃ (একটি ভেক্টরের দিক বরাবর অপর একটি ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয়)

$\bar{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\bar{b}$ ভেক্টরের উপাংশ একটি ভেক্টর রাশি যার মান $\bar{a}$ এর উপর $\bar{b}$ এর লম্ব অভিক্ষেপের সমান এবং দিক হলো $\bar{a}$ এর দিক।

সুতরাং $\bar{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\bar{b}$ ভেক্টরের উপাংশ = $\dfrac{\bar{a}\,.\,\bar{b}}{|\bar{a}|}\,\hat{a}$; যেখানে $\hat{a}$ হচ্ছে $\bar{a}$ বরাবর একক ভেক্টর।

$$= (\hat{a}\,.\,\bar{b})\,\hat{a}$$

একইভাবে, $\bar{b}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\bar{a}$ ভেক্টরের উপাংশ = $\dfrac{\bar{a}\,.\,\bar{b}}{|\bar{b}|}\,\hat{b}$; যেখানে $\hat{b}$ হচ্ছে $\bar{b}$ বরাবর একক ভেক্টর।

$$= (\bar{a}\,.\,\hat{b})\,\hat{b}$$

➢ কোনো ভেক্টরের অভিক্ষেপ একটি স্কেলার রাশি এবং উপাংশ একটি ভেক্টর রাশি

❖ ভেক্টরের মান নির্ণয় : $\bar{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\hat{k}$ হলে $|\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

❖ $\bar{a} = a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} + a_z\,\hat{k}$ এবং $\bar{b} = b_x\,\hat{\imath} + b_y\,\hat{\jmath} + b_z\,\hat{k}$ হলে $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

❖ দুটি ভেক্টরের লম্ব হওয়ার শর্তঃ $\bar{a}\,.\,\bar{b} = 0$,অর্থাৎ $\bar{a}$, $\bar{b}$ দুটি ভেক্টরের ডট গুণন শূন্য হলে তারা পরস্পর লম্ব হবে।

❖ দুটি ভেক্টরের সমান্তরাল হওয়ার শর্তঃ $\bar{a} \times \bar{b} = 0$,অর্থাৎ $\bar{a}$, $\bar{b}$ দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণন শূন্য হলে তারা পরস্পর সমান্তরাল হবে।

❖ তিনটি ভেক্টরের সমতলীয় হওয়ার শর্তঃ ভেক্টর তিনটির $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগগুলি নিয়ে গঠিত নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

❖ $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর = $\pm\,\dfrac{\bar{a}\times\bar{b}}{|\bar{a}\times\bar{b}|}$

❖ যদি $\bar{a}, \bar{b}$ দুটি ভেক্টর হয়, তবে $\bar{a}\,.\,\bar{b} = ab\ \cos\theta$

❖ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\bar{a}.\bar{b}}{ab}\right)$

❖ $\bar{a}\times\bar{b} = ab\sin\theta.\hat{n}$; এখানে $\hat{n}$ হচ্ছে $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর।

❖ $|\bar{a}\times\bar{b}| = \sin\theta = a(b\sin\theta) = ah\ = OABC$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।

❖ যদি $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ দ্বারা কোন ত্রিভুজের দু'টি বাহু নির্দেশ করে, তবে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|$

❖ যদি $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ দ্বারা কোন সামান্তরিকের দু'টি কর্ণ নির্দেশ করে, তবে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|$

- ❖ যদি $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ দ্বারা কোন সামান্তরিকের দু'টি বাহু নির্দেশ করে, তবে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল $= |\bar{a} \times \bar{b}|$
- ❖ $\bar{a}$ এর উপর $\bar{b}$ এর অভিক্ষেপ $= \frac{\bar{a}.\bar{b}}{a}$ এবং $\bar{b}$ এর উপর $\bar{a}$ এর অভিক্ষেপ $= \frac{\bar{a}.\bar{b}}{b}$
- ❖ $\bar{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$; $\bar{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ এবং $\bar{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ ভেক্টরত্রয় দ্বারা গঠিত ঘনবস্তুর আয়তন

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

- ❖ $\bar{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$; $\bar{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ এবং $\bar{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ ভেক্টরত্রয় সমতলীয় হলে,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

- ❖ A(a) বিন্দুগামী এবং b ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ r = a + tb ,যেখানে t একটি প্যারামিটার
- ❖ A(a) বিন্দুগামী এবং B(b) ও C(c) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সররেখার সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ r = a + t(c -b)
- ❖ A(a) ও B(b) বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ r = a + t(b - a)
- ❖ সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ r = a + tb এর কার্তেসীয় সমীকরণ $\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \frac{z - a_3}{b_3}$

- দুটি ভেক্টরের স্কেলার বা ডট গুণনের ধর্মাবলী :
  - ➢ বিনিময় বিধি মেনে চলে : a.b = b.a
  - ➢ সংযোগ বিধি মেনে চলে :(m.a).b = m(a.b) = a.(m.b)
  - ➢ বন্টন বিধি মেনে চলে :a.(b + c) = a.b + a.c
- দুটি ভেক্টরের যোগের ধর্মাবলী :
  - ➢ বিনিময় বিধি মেনে চলে : a + b = b + a
  - ➢ সংযোগ বিধি মেনে চলে :(m + a) + b = m + (a + b) = a+ (m + b)
  - ➢ অভেদ বিধি মেনে চলে : a + 0 = 0 + a = a
  - ➢ বিপরীত বিধি মেনে চলে : a + (-a) = (-a) + a = 0